Riassunto. Vengono esposte le proprietá di base sia delle funzioni multivoche regolari, una generalizzazione delle funzioni continue ordinarie, sia dei quozienti differenziali generalizzati, una generalizzazione del differenziale in R^n .

Abstract . We expose the basic properties both of regular set-valued maps, a generalization of the continuous functions, and of generalized differential quotients, a generalization of the differential in R^n.

QUOZIENTI DIFFERENZIALI GENERALIZZATI

ANGELO CAVALLUCCI

Il classico Principio di Massimo di Pontryagin [6] per i problemi di controllo e' stato esteso a tipi di problemi via via piu' generali da vari Autori e in particolare da Clarke [3], Warga [12], Halkin [4], Kaskosz e Lojasiewicz jr. [5] e da Sussmann in una serie di lavori (cfr. [9], [10], [11]).

In tali estensioni del Principio di Massimo sono state utilizzate varie generalizzazioni del concetto di differenziale e in particolare Sussmann ha proposto almeno quattro tipi di differenziale generalizzato (cfr. [8], [10], [11]).

Nelle sue estensioni del Principio di Massimo, Sussmann ha seguito sostanzialmente il metodo di dimostrazione originale di [6], ma utilizzando differenziali generalizzati in luogo del differenziale ordinario. Anzi, nelle varie generalizzazioni del concetto di differenziale si e' sempre preoccupato di conservare le proprieta' del differenziale ordinario utilizzate in modo essenziale nella dimostrazione del Principio di Massimo contenuta in [6], ossia principalmente buon comportamento rispetto alla *composizione di funzioni* e validita' di qualche tipo di *teorema dell' applicazione aperta*.

Qui ci proponiamo di esporre la sua teoria dei *quozienti differenziali generalizzati*. Per questo occorre introdurre preliminarmente le *applicazioni regolari*, che sono da considerare una generalizzazione delle funzioni continue.

Se X e Y sono spazi metrici (con distanza d), indichiamo con $M(X,Y) = \{F \subset X \times Y\}$ la classe delle multifunzioni F, che identifichiamo con il relativo grafico, da X a Y. Ricordiamo che, per $F \subset X \times Y$ e $G \subset Y \times Z$,

$$F(x) = \{y \in Y |\ (x,y) \in F\}$$

$$Do(F) = \{x \in X |\ F(x) \neq \emptyset\}$$

$$F^{-1}(y) = \{x \in X |\ (x,y) \in F\}$$

$$G \circ F = \{(x,z) \in X \times Z |\ \exists y \in Y : (x,y) \in F, (y,z) \in G\}$$

F si dice *superiormente semicontinua* (u.s.c.) se per ogni $x \in X$ e per ogni aperto $\Omega \supset F(x)$ esiste un aperto $O \ni x$ tale che

$$F(O) \subset \Omega.$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Proposizione 1. . *Valgono le seguenti affermazioni*

a) Se $F = \bar{F}$ (chiusura) e Y e' compatto, oppure se F e' compatto, allora F e' u.s.c.

b) Se X e' compatto, F e' u.s.c. e $F(x)$ e' compatto per ogni $x \in X$, allora F e' compatto in $X \times Y$.

c) Se F e' u.s.c., $F(x) \neq \emptyset$ convesso per ogni $x \in X$ e Y e' uno spazio di Banach, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $f_\epsilon : X \longrightarrow Y$ continua (a un solo valore) tale che

$$f_\epsilon \subset F^\epsilon,$$

$$f_\epsilon(X) \subset coF(X) = \textit{involucro convesso di } F(X) \ ,$$

con $F^\epsilon = \{(x, y) \in X \times Y | \ d((x, y), F) \leq \epsilon\}$.

d) Se $R^n \supset K \neq \emptyset$ compatto e convesso e se $F \subset K \times K$ e' u.s.c. con $F(x) \neq \emptyset$ convesso e compatto per ogni $x \in K$, allora esiste $\bar{x} \in F(\bar{x})$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [1], [8].
L'affermazione d) e' nota come " teorema di Kakutani".

Poniamo, seguendo [8],

$$M_c(X, Y) = \{F \subset X \times Y | \ F \textit{ compatto}\}.$$

Se $F, F_j \in M_c(X, Y)$ per $j \geq 1$, diremo che la successione F_j *converge in grafico* a F se per ogni apero $\Omega \supset F$ esiste j_Ω tale che

$$F_j \subset \Omega \text{ per } j \geq j_\Omega.$$

Diremo che $F \subset X \times Y$ e' *regolare* se per ogni compatto $K \subset X$ si ha

i) $F_{|K} = F \cap (K \times Y)$ e' compatto,

ii) esiste una successione di funzioni continue (a un sol valore)

$$f_j : K \longrightarrow Y, \ j \geq 1,$$

tali che

$$f_j \xrightarrow[j \to \infty]{gr} F_{|K}.$$

Indichiamo con REG(X,Y) l'insieme delle multifunzioni F regolari da X a Y. Elenchiamo nelle proposizioni che seguono alcune proprieta' delle multifunzioni regolari. Per le dimostrazioni si veda [8].

E' chiaro che ogni funzione continua

$$f : X \longrightarrow Y$$

appartiene a REG(X,Y). Viceversa si ha la seguente proposizione

Proposizione 2. . *Se $F \subset X \times Y$ verifica la condizione i) e se $F(x_0) = \{y_0\}$, allora*

$$\sup_{y \in F(x)} d(y, y_0) \longrightarrow 0 \textit{ per } x \longrightarrow x_0.$$

Ne segue che, se $F(x) = \{f(x)\}$ per ogni $x \in X$, allora la funzione f e' continua su X.

Proposizione 3. . *Supponiamo X compatto, $F \in M_c(X,Y)$,*

$$f_j : X \longrightarrow Y \text{ continua per } j \geq 1$$

e poniamo

$$L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{(x, f_j(x)) |\ x \in X, j \geq k\}}.$$

Allora si ha

a) se $f_j(X) \subset K$ compatto per $j \geq 1$, allora

$$L \in REG(X,Y) \text{ e } f_j \xrightarrow[j\to\infty]{gr} L;$$

b) sono equivalenti le affermazioni

i)
$$f_j \xrightarrow[j\to\infty]{gr} F;$$

ii)
$$L \subset F \text{ e } F_1 = F \cup \{(x, f_j(x)) |\ x \in X, j \geq 1\} \text{ e' compatto };$$

iii) F_1 e' compatto e per ogni insieme infinito $J \subset N$ si ha

$$(x_j, f_j(x_j)) \underset{J\ni j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} (x,y) \Longrightarrow (x,y) \in F;$$

iv) $f_j(X) \subset K$ compatto per $j \geq 1$ e

$$(x_j, f_j(x_j)) \underset{J\ni j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} (x,y) \Longrightarrow (x,y) \in F;$$

v) $f_j(X) \subset K$ compatto per $j \geq 1$ e $L \subset F$;

c) se $F \in REG(X,Y)$, allora $F(X)$ e' compatto e $F(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$.

Proposizione 4. . *Se $F \in REG(X,Y)$ e $G \in REG(Y,Z)$, allora $G \circ F \in REG(X,Z)$.*

Proposizione 5. . *Sia X compatto, $F \in M_c(X,R^n)$ e $F(x) \neq \emptyset$ convesso per ogni $x \in X$. Allora $F \in REG(X,R^n)$.*

Questa proposizione segue dalla Proposizione 1.

Proposizione 6. . *Sia $B = \{x \in R^n |\ |x| \leq 1\}$ e sia $F \in REG(B,R^n)$. Allora si ha*

a) se $F(B) \subset B$, esiste $\bar{x} \in F(\bar{x})$;

b) se $0 \leq \alpha \leq 1$ e se

$$|x| = 1 \Longrightarrow d(x, F(x)) \leq \alpha,$$

allora

$$(1-\alpha)B \subset F(B).$$

Questa proposizione e' un corollario di una proposizione piu' generale contenuta in [8].

Veniamo ora alla definizione di *quoziente differenziale generalizzato* per multifunzioni $F \subset R^m \times R^n$. Poniamo $B = \{x |\ |x| \leq 1\}$ sia in R^n che in ogni altro spazio normato che considereremo.

Definizione. . *Sia* $(0,0) \in F \subset R^m \times R^n, S \subset R^m, \Lambda \neq \emptyset$ *compatto in* $\mathcal{L}(R^m, R^n)$ $= \{L : R^m \longrightarrow R^n | \ L \ lineare\}$. *Diciamo che* Λ *e' un quoziente differenziale generalizzato di F in (0,0) nella direzione S, in simboli* $\Lambda \in GDQ(F; 0, 0; S)$, *se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \exists G_\epsilon \in REG(S \cap \delta_\epsilon B, \Lambda + \epsilon B) :$$

$i)$ $$S \cap \delta_\epsilon B \ = \ compatto \ in \ R^m,$$

$ii)$ $$G_\epsilon(x)x \subset F(x) \ per \ ogni \ x \in S \cap \delta_\epsilon B,$$

ove

$$G_\epsilon(x)x = \{Lx | \ L \in G_\epsilon\}.$$

I quozienti differenziali generalizzati sono dovuti a Sussmann (cfr. [9], [10], [7], [11]) insieme con le proposizioni che seguono.

Proposizione 7. . *Sia f una funzione ordinaria continua in un intorno di 0 in* R^m, *a valori in* R^n *e differenziabile in 0. Allora si ha*

$$f'(0) \in GDQ(f; 0, 0; R^m).$$

Infatti si ha (cfr. [2]) dalla definizione di differenziale

$$f(x) = f'(0) + |x|\omega(x), \ \omega(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = \omega(0).$$

Poniamo, per $h \in R^m$,

$$G(x)h = f'(0)h + < h, \frac{x}{|x|}\omega(x) > \ \text{per } x \neq 0,$$
$$G(0)h = f'(0)h.$$

Allora G e' continua e si ha

$$f(x) = G(x)x, \ G(0) = f'(0).$$

Sussmann afferma che questa proposizione e' stata una motivazione per la sua definizione di quoziente differenziale generalizzato.

Sia f una funzione (ordinaria) localmente lipschitziana in un intorno di 0 in R^m, a valori in R^n. Allora l'insieme E_f dei punti in cui f e' differenziabile ha il complementare di misura nulla. Il *differenziale generalizzato secondo Clarke [3]* e' definito da

$$\partial f(0) = co\{\lim_{j \to \infty} f'(x_j) | \ E_f \ni x_j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0\}$$

ed e' compatto convesso non vuoto in $\mathcal{L}(R^m, R^n)$.

Proposizione 8. . *Per la funzione f si ha*

$$\partial f(0) \in GDQ(f;0,0;R^m).$$

Osserviamo che per la funzione localmente lipschitziana

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ per } x \neq 0,$$
$$f(0) = 0$$

si ha

$$\{0\} = \{f'(0)\} \in GDQ(f;0,0;R),$$
$$\partial f(0) = [-1,1],$$

mentre per la funzione non localmente lipschitziana

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \text{ per } x \neq 0,$$
$$f(0) = 0$$

si ha $[-1,1] \in GDQ(f;0,0;R)$.
Infatti la multifunzione G data da

$$G(x) = \{\sin\frac{1}{x}\} \text{ per } x \neq 0,$$
$$G(0) = [-1,1]$$

e' regolare per la Proposizione 5.

Proposizione 9. . *Sia* $F_i \subset R^{n_i} \times R^{n_i+1}$, $S_i \subset R^{n_i}$, $\Lambda_i \in GDQ(F_i;0,0;S_i)$ *per i=1,2 e sia*

$$F_1(S_1) \subset S_2.$$

Se S_2 *e' un cono convesso chiuso, oppure* F_1 *e' a un solo valore, allora*

$$\Lambda_2 \circ \Lambda_1 \in GDQ(F_2 \circ F_1;0,0;S_1).$$

Se invece $F_i \subset R^{m_i} \times R^{n_i}$, $S_i \subset R^{m_i}$, $\Lambda_i \in GDQ(F_i;0,0;S_i)$ *per i=1,2, allora*

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 \in GDQ(F_1 \times F_2;0,0;S_1 \times S_2).$$

Proposizione 10. . *Sia* $F \subset R^m \times R^n$, *sia C un cono convesso chiuso in* R^m, *sia* $\Lambda \in GDQ(F;0,0;C)$ *e sia D un cono convesso chiuso in* R^n *tale che*

$$D \subset \{0\} \cup int L(C) \text{ per ogni } L \in \Lambda.$$

Allora esistono le costanti $\bar{\epsilon} > 0$, $\alpha > 0$ *e il cono convesso* Δ *in* R^n *tali che*

i)
$$D \subset \{0\} \cup int\Delta,$$

ii)
$$\Delta \cap \epsilon B \subset F(C \cap \alpha\epsilon B) \text{ per } 0 \leq \epsilon \leq \bar{\epsilon},$$

iii) per ogni $y \in \Delta$ con $|y| = \epsilon \leq \bar{\epsilon}$, esiste Z_y compatto e connesso in $[0,1] \times (C \cap \alpha\epsilon B)$ *per il quale si ha*

$$0 \in Z_y(0),$$
$$ry \in (F \circ Z_y)(r) \text{ per } 0 \leq r \leq 1.$$

<u>*Osservazione*</u>. Se $C = R^m$ e

$$L(R^m) = R^n \text{ per ogni } L \in \Lambda,$$

allora si puo' prendere $D = R^n$ e quindi sara' $\Delta = R^n$ e la ii) assume la forma

$$\epsilon B \subset F(\alpha\epsilon B) \text{ per } 0 \leq \epsilon \leq \bar{\epsilon}.$$

Consideriamo le funzioni (ordinarie)

$$R^n \times R \supset \Omega \ni (x,t) \longrightarrow f(x,t) \in R^n,$$

$$Do(\xi) \ni t \longrightarrow (\xi(t), t) \in \Omega,$$

ove Ω e' aperto, $Do(\xi)$ e' un intervallo non vuoto, $f(\cdot,t)$ e' continua per ogni t, $f(x,\cdot)$ e' misurabile per ogni x e per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $\phi_K \in L^1(R)$ tale che

$$|f(x,t)| \leq \phi_K(t) \text{ per ogni } (x,t) \in K$$

La funzione $\xi(\cdot)$ si dira' *traiettoria* di f se e' localmente assolutamente continua e se

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t), t) \text{ q.d. su } Do(\xi)$$

Poniamo per ogni $(x,b,a) \in R^n \times R \times R$

$$\Phi^f(x,b,a) = \{\xi(b) |\ \xi = \text{ traiettoria di } f, a, b \in Do(\xi), \xi(a) = x\},$$
$$\Phi^f(x)_{b,a} = \Phi^f(x,b,a).$$

Puo' essere $\Phi^f(x)_{b,a} = \emptyset$, ma si ha comunque

$$\Phi^f(x)_{a,a} = \{x\},$$
$$\Phi^f(x)_{c,b} \circ \Phi^f(x)_{b,a} = \Phi^f(x)_{c,a} \text{ se } a \leq b \leq c.$$

Sia C un cono in R, $(\bar{x},\bar{t}) \in \Omega$, $\emptyset \neq V \subset R^n$. Diremo che V e' un *insieme limite approssimato di f in $(\bar{x},\bar{t})$ lungo C* e scriveremo

$$V \in \underset{(x,t) \xrightarrow{C} (\bar{x},\bar{t})}{\text{App-lim}} f(x,t)$$

se

$$\frac{1}{h} \int_{\substack{|t-\bar{t}| \leq h \\ t-\bar{t} \in C}} \sup_{|x-\bar{x}| \leq \epsilon} d(f(x,t), V)\, dt \underset{\substack{h \to 0+ \\ \epsilon \to 0+}}{\longrightarrow} 0.$$

Sia $K = \{(x,t) \in R^n \times R | \ |x-\bar{x}| \leq \bar{\epsilon}, |t-\bar{t}| \leq \bar{h}, t-\bar{t} \in C\} \subset \Omega$, con $\bar{\epsilon} > 0$ e $\bar{h} > 0$, e sia dato l'insieme misurabile $E \subset \{t \in R| \ |t-\bar{t}| \leq \bar{h}, t-\bar{t} \in C\}$. Se $\bar{t}$ e' C-punto di Lebesgue della funzione ϕ_K e punto di C-densita' di E e se

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow \bar{x} \\ E \ni t \longrightarrow \bar{t}}} f(x,t) = f(\bar{x},\bar{t})$$

allora si ha

$$(*) \qquad \{f(\bar{x},\bar{t})\} = \operatorname*{App\text{-}lim}_{(x,t) \xrightarrow{C} (\bar{x},\bar{t})} f(x,t)$$

Nelle nostre ipotesi su f, vale la formula (*) per quasi ogni $\bar{t}$.

La funzione multivoca misurabile

$$R \supset [a,b] \ni t \longrightarrow \Lambda(t) \neq \emptyset \text{ compatto convesso } \subset \phi(t)B \subset \mathcal{L}(R^n, R^m),$$

ove $0 \leq \phi_\Lambda \in L^1(a,b)$, si dice *generatore variazionale di f lungo la traiettoria ξ di f* se $[a,b] \subset Do(\xi)$ e se esistono la costante $\bar{\alpha} > 0$ e la funzione

$$]0,\bar{\alpha}] \times [a,b] \ni (\alpha,t) \longrightarrow k_\alpha(t) \in [0,+\infty]$$

tali che $k_\alpha(\cdot) \in L^1(a,b)$ e

$$\int_a^b k_\alpha(t)\,dt \longrightarrow 0 \text{ per } \alpha \longrightarrow 0+,$$

$$\sup_{|x-\xi(t)| \leq \alpha} \left(\min_{L \in \Lambda(t)} |f(x,t) - f(\xi(t),t) - L(x-\xi(t))| \right) \leq \alpha k_\alpha(t) \text{ per ogni } \alpha, t$$

Indichiamo con $\Gamma(\Lambda)$ l'insieme delle selezioni misurabili

$$[a,b] \ni t \longrightarrow L(t) \in \Lambda(t)$$

e indichiamo con M_L la soluzione (matriciale) del problema, per $a \leq t \leq b$,

$$D_t M_L(t,s) = L(t) M_L(t,s) \text{ per } a \leq t \leq b,$$
$$M_L(s,s) = Id.$$

Se $V_\pm \neq \emptyset$ sono sottoinsiemi di R^n, poniamo

$$\tilde{M}_{b,a}(\Lambda; V_+, V_-) = \{R^n \times R^n \times R^n \ni (y,\alpha,\beta) \longrightarrow M_L(b,a)y +$$

$$\beta v_+ - \alpha M_L(b,a) v_- | \ L \in \Gamma(\Lambda), v_- \in V_-, v_+ \in V_+\}$$

Ora siamo in grado di enunciare la seguente

Proposizione 11. . *Se Λ e' un generatore variazionale di f lungo ξ, se C_+ e C_- sono coni in R e se per $V_{+-} \neq \emptyset$ compatto e convesso in R^n si ha*

$$V_+ = \underset{(x,t) \xrightarrow{C_+} (\xi(b),b)}{App\text{-}lim} f(x,t),$$

$$V_- = \underset{(x,t) \xrightarrow{C_-} (\xi(a),a)}{App\text{-}lim} f(x,t),$$

allora

$$\tilde{M}_{b,a}(\Lambda; V_+, V_-) \in GDQ(\Phi^f; (\xi(a), b, a), \xi(b); C),$$

con

$$C = R^n \times (b + C_+) \times (a + C_-).$$

Osservazione1. Supponiamo che per f e la sua traiettoria $\xi : [a,b] \longrightarrow R^n$ sia soddisfatta la condizione

$$|f(x,t) - f(x',t)| \leq \phi_\xi(t)|x - x'| \text{ per } |x - \xi(t)| \leq \bar{\alpha}, |x' - \xi(t)| \leq \bar{\alpha}, a \leq t \leq b,$$

ove $\bar{\alpha} > 0$ e $\phi_\xi \in L^1(a,b)$. Allora si puo' prendere

$$\Lambda(t) = \partial_x f(\xi(t), t),$$

essendo $\partial_x f(x,t)$ il differenziale generalizzato di Clarke.

Osservazione2. La multifunzione Φ^f e' regolare localmente in ogni punto $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{t})$ tale che $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega$.

Proposizione 12. . *Consideriamo la funzione*

$$R^n \supset \Omega \ni x \longrightarrow f(x) \in R^n$$

continua con Ω aperto e poniamo

$$\Phi^f(x,t) = \Phi^f(x,t,0),$$

$$L^f(x)(y,r) = y + rf(x) \text{ per } (x,r) \in R^n \times R.$$

Allora si ha

$$\{L^f(x)\} \in GDQ(\Phi^f; (x,0), x; R^n).$$

Supponiamo ora $f, g \in Lip_{loc}(\Omega)$ e poniamo

$$E_f = \{x \in \Omega | \text{ esiste il differenziale f'(x) }\},$$

$$[f,g](x) = co\{\lim_{j\to\infty}[g'(x_j)f(x_j) - f'(x_j)g(x_j)] | \; E_f \cap E_g \ni x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x\},$$

Allora riesce $[f,g](x) \neq \emptyset$ convesso e compatto per ogni $x \in \Omega$, poiche' $\Omega \setminus E_f$ ha misura nulla. Nelle ipotesi attuali su f e g, l'insieme $\Phi^f(x,t,0)$ ha un solo elemento, per $|t|$ abbastanza piccolo, che indichiamo con xe^{tf}. Dunque sara'

$$\Phi^f(x,t,0) = \{xe^{tf}\}.$$

Poniamo anche, per $|t|, |s|$ abbastanza piccoli,

$$\Psi^{f,g}(x,t,s) = xe^{tf}e^{sg}e^{-tf}e^{-sg},$$

$$\Theta^{f,g}(x,\epsilon) = \begin{cases} \Psi^{f,g}(x,\sqrt{\epsilon},\sqrt{\epsilon}) \text{ per } \epsilon \geq 0, \\ \Psi^{f,-g}(x,\sqrt{-\epsilon},\sqrt{-\epsilon}) \text{ per } \epsilon \leq 0, \end{cases}$$

$$\Lambda(x) = \{R^n \times R \ni (y,r) \longrightarrow y + rw | \; w \in [f,g](x)\}.$$

Vale la seguente

Proposizione 13. . *Se $x \in \Omega$ e $f, g \in Lip_{loc}(\Omega, R^n$, allora*

$$\Lambda(x) \in GDQ(\Theta^{f,g}; (x,0), x; R^n)$$

BIBLIOGRAFIA

1. J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. M.W. Botsko, R.A. Gosser, *On the differentiability of functions of several variables*, Amer. Mathem. Monthly **92, 9** (1985), 663-65.
3. F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
4. H. Halkin, *Necessary conditions for optimal control problems with differentiable or multidifferentiable data*, Mathematical Control Theory, Lecture Notes in Mathem. 680, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
5. B. Kaskosz, S. Lojasiewicz jr, *A maximum principle for generalized control systems*, Nonlin. An. TMA **9** (1985), 109-30.
6. L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mischenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Wiley, New York, 1962.
7. F. Rampazzo, H.J. Sussmann, *Set-valued differentials and a nonsmooth version of Chow's theorem*, Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control; Orlando, Florida, December 4 to 7, 2001.
8. H.J. Sussmann, *Multidifferential calculus: chain rule, open mapping and transversal intersection theorems*, Optimal control: Theory, Algorithms and applications (1998), Kluwer, 436-87.
9. H.J. Sussmann, *Resultats recents sur les courbes optimales*, XV Journee Annuelle de la Societe Mathematique de France (SMF) (2000), Publications de la SMF, Paris, 1-52.
10. H.J. Sussmann, *New theories of set-valued differentials and new versions of the maximum principle of optimal control theory*, Nonlinear control in the year 2000 (2000), Springer-Verlag, London, 487-526.
11. H.J. Sussmann, *Warga derivate containers and other generalized differentials*, Submitted for publication in the Proceedings of the 2002 Conference on Decision and Control, to be held in Las Vegas, Nevada, December 2002, and for presentation at the conference..
12. J. Warga, *Optimization and controllability without differentiability assumptions*, SIAM J. Control and Optim. **21** (1983), 837-55.